ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ
ΤΑΞΗ: Γ΄ ΕΠΑΛ
ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ: ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ
ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ: ΜΑΡΚΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

ΘΕΜΑ Α

Α1. Αν $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι οι τιμές μίας μεταβλητής X που αφορά άτομα ενός δείγματος μεγέθους ν, $k \leq n$, να αποδείξετε ότι για τις αντίστοιχες σχετικές συχνότητες f_i ισχύει ότι:

$$f_1 + f_2 + \ldots + f_k = 1.$$

Μονάδες 6

Α2. Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες**:

(α΄) Το ραβδόγραμμα (barchart) χρησιμοποιείται για τη γραφική παράσταση των τιμών μίας ποσοτικής μεταβλητής.

(β΄) Η διακύμανση/διασπορά μετριέται στις ίδιες μονάδες που μετριούνται και οι παρατηρήσεις του δείγματος.

(γ΄) Σε ένα δείγμα 5 παρατηρήσεων με μέση τιμή $\bar{x} = 6$ αν αυξήσουμε μία παρατήρηση κατά 2 μονάδες τότε θα αυξηθεί και η μέση τιμή κατά 2 μονάδες.

(δ΄) Η διάμεσος ενός δείγματος είναι πάντοτε ίση με μία από τις παρατηρήσεις του δείγματος.

(ε΄) Το εύρος (R) ενός δείγματος μας δείχνει την απόσταση της μεγαλύτερης από την μικρότερη παρατήρηση.

Μονάδες 10

Α3. Ποιες μεταβλητές ονομάζουμε **ποσοτικές** και σε ποιες κατηγορίες τις διακρίνουμε; Να δώσετε από τρία παραδείγματα για κάθε κατηγορία που θα γράψετε.

Μονάδες 6

Α4. Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη** και να **αιτιολογήσετε** την απάντησή σας:

«Αν οι 400 παρατηρήσεις ενός δείγματος ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 46$ και τυπική απόκλιση $s = 4$ τότε περίπου 480 από αυτές είναι μικρότερες ή ίσες από 54».

Μονάδες 3

ΛΥΣΗ

Α1. Σ.Β., σελ. 65.

Α2. (α΄) Λάθος

(β΄) Λάθος

(γ΄) Λάθος

(δ΄) Λάθος

(ε΄) Σωστό

Α3. Σ.Β., σελ. 59.

Α4. Η πρόταση είναι **Λανθασμένη**. Πράγματι, αφού οι παρατηρήσεις ακολουθούν περίπου κανονική κατανομή με μέση τιμή $\bar{x} = 46$ και τυπική απόκλιση $s = 4$ τότε το $2,5\%$ αυτών είναι μεγαλύτερες από $\bar{x} + 2s = 46 + 8 = 54$, συνεπώς περίπου $400 \cdot 2.5\% = 400 \cdot \frac{2.5}{100} = 10$ παρατηρήσεις είναι μεγαλύτερες από 54 άρα οι υπόλοιπες (περίπου) 490 είναι μικρότερες ή ίσες από 54.

ΘΕΜΑ Β

Οι θερμοκρασίες των τελευταίων 10 ημερών στην πόλη της Χαλκίδας ήταν οι εξής:

$$27, 24, 27, 27, 26, 25, 24, 25, 28, 27.$$

Β1. Να κατασκευάσετε έναν πίνακα συχνοτήτων για το παραπάνω δείγμα που να συμπεριλαμβάνει τις απόλυτες (ν_i) και σχετικές (f_i) συχνότητες καθώς και τις αντίστοιχες αθροιστικές συχνότητες.

Μονάδες 8

Β2. Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα και πολύγωνα σχετικών και αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων για το παραπάνω δείγμα.

Μονάδες 5

Β3. Να υπολογίσετε τη μέση και τη διάμεση θερμοκρασία καθώς και την τυπική απόκλιση για το παραπάνω δεκαήμερο.

Μονάδες 9

Β4. Να εξετάσετε αν το παραπάνω δείγμα είναι ομοιογενές.

Μονάδες 3

Δίνεται: $\sqrt{1.8} = 1.34$.

ΛΥΣΗ

Β1. Στον πίνακα 1 βλέπουμε τον ζητούμενο πίνακα συχχοτήτων.

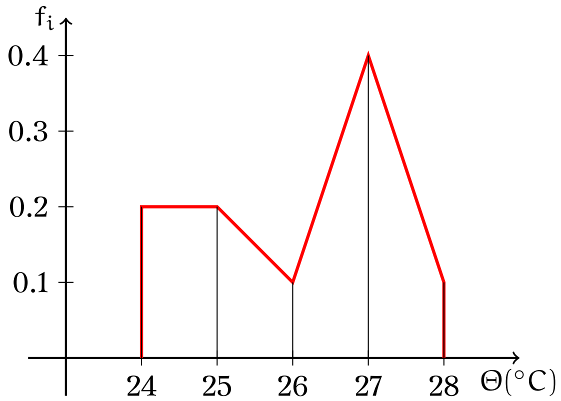
x_i	ν_i	f_i	N_i	F_i
24	2	0.2	2	0.2
25	2	0.2	4	0.4
26	1	0.1	5	0.5
27	4	0.4	9	0.9
28	1	0.1	10	1
Σύνολο	10	1	–	–

Πίνακας 1: Ο πίνακας συχντοτήτων του ερωτήματος 2.

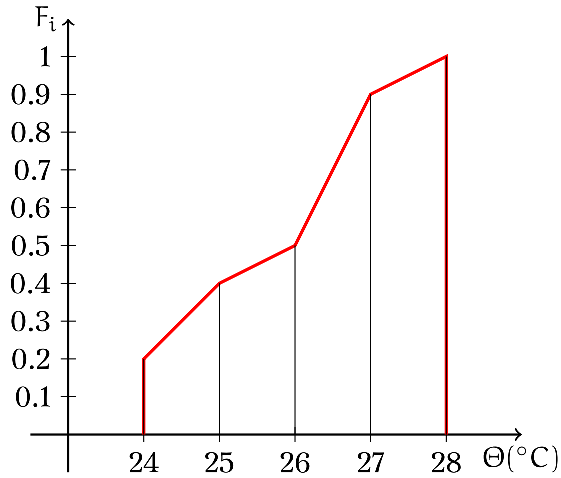
Β2. Τα ζητούμενα διαγράμματα και πολύγωνα φαίνονται στο σχήμα 2

Β3. Για τη διάμεσο, παρατηρούμε ότι οι δύο μεσαίες παρατηρήσεις είναι οι 26 και 27, επομένως:

$$\delta = \frac{26 + 27}{2} = 26.5.$$



(α′) Διάγραμμα και πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.



(β′) Διάγραμμα και πολύγωνο σχετικών συχνοτήτων.

Σχήμα 2: Διαγράμματα και πολύγωνα συχνοτήτων.

Για τη μέση τιμή έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{2 \cdot 24 + 2 \cdot 25 + 1 \cdot 26 + 4 \cdot 27 + 1 \cdot 28}{10} = \frac{260}{10} = 26.$$

Για τη διακύμανση έχουμε:

$$s^2 = \frac{2(24-26)^2 + 2(25-26)^2 + 1(26-26)^2 + 4(27-26)^2 + 1(28-26)^2}{10} = $$
$$= \frac{2 \cdot 4 + 2 \cdot 1 + 0 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot 4}{10} = \frac{18}{10} = 1.8.$$

Συνεπώς:

$$s = \sqrt{s^2} = \sqrt{1.8} = 1.34.$$

Β4. Για την ομοιογένεια του δείγματος έχουμε:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{1.34}{26} < \frac{2.6}{26} = 0.1,$$

άρα το δείγμα είναι ομοιογενές.

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται ο παρακάτω πίνακας συχνοτήτων για ένα δείγμα ν παρατηρήσεων:

$[\alpha_i, \beta_i)$	x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
[-4,0)		4					
[0,4)			0,25				
[4,8)							90
[8,12)		2					
Σύνολο	–				–	–	–

Γ1. Να συμπληρώσετε τον πίνακα.

Μονάδες 9

Γ2. Να βρείτε τη διάμεσο (δ) του δείγματος.

Μονάδες 8

Γ3. Έστω $\overline{x}$ και s η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του παραπάνω δείγματος αντίστοιχα. Αν $\overline{x}'$ και s' είναι η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση του δείγματος αφού πολλαπλασιάσουμε κάθε παρατήρησή του με -4, να λύσετε την εξίσωση:

$$x^2 - \frac{s'-s}{s}x - \frac{4\overline{x}-\overline{x}'}{\overline{x}'} = 0.$$

Μονάδες 8

ΛΥΣΗ

Γ1. Ο ζητούμενος πίνακας συχνοτήτων είναι πίνακας 2.

$[\alpha_i, \beta_i)$	x_i	ν_i	f_i	$f_i\%$	N_i	F_i	$F_i\%$
[-4,0)	-2	4	0.20	20	4	0.20	20
[0,4)	2	5	0.25	25	9	0.45	45
[4,8)	6	9	0.45	45	18	0.90	90
[8,12)	10	2	0.10	10	20	1	100
Σύνολο	—	20	1	100	—	—	—

Πίνακας 2: Ο ζητούμενος πίνακας συχνοτήτων.

Γ2. Για να βρούμε τη διάμεσο θα σχεδιάσουμε πρώτα το πολύγωνο αθροιστικών σχετικών συχνοτήτων επί τοις εκατό ($F_i\%$) όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Στη συνέχεια, αφού η διάμεσος αντιστοιχεί στην τιμή $F_i = 50\%$ φέρουμε ευθεία από το 50 του άξονα των $F_i\%$ και κατασκευάζουμε τα σημεία A, B όπως φαίνεται στο σχήμα 3. Από την ομοιότητα των τριγώνων $\triangle ABC$ και $\triangle CDE$ έχουμε:

$$\frac{AB}{ED} = \frac{BC}{CD} \Leftrightarrow \frac{8-\delta}{8-4} = \frac{90-50}{90-45} \Leftrightarrow \frac{8-\delta}{4} = \frac{40}{45} \Leftrightarrow \frac{8-\delta}{4} = \frac{8}{9} \Leftrightarrow 72-9\delta = 32 \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{40}{9}.}$$

Γ3. Αφού πολλαπλασιάσουμε κάθε τιμή του δείγματος με -4 η μέση τιμή και η τυπική απόκλιση μεταβάλλονται ως εξής:

$$\overline{x}'4\overline{x}, \ \ s' = |-4|s = 4s.$$

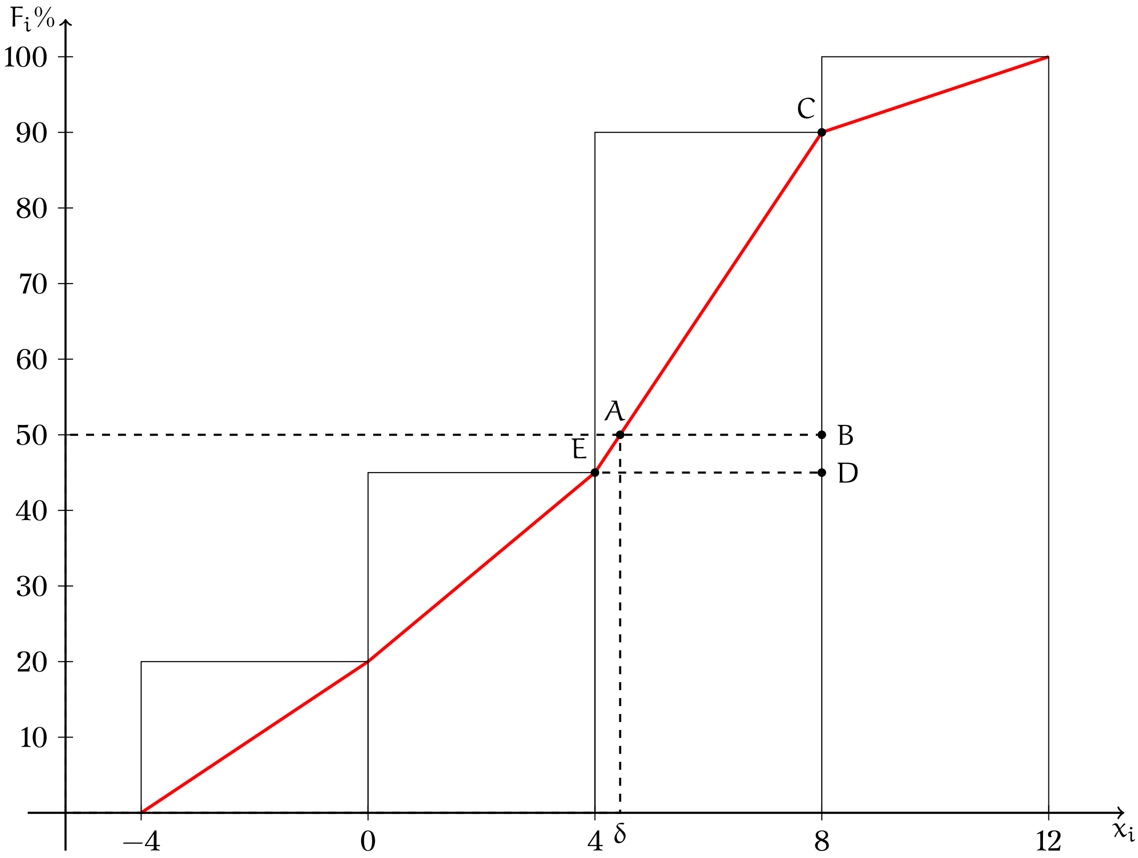
Έτσι, έχουμε:

$$\frac{s'-s}{s} = \frac{4s-s}{s} = \frac{3s}{s} = 3 \quad (1)$$

$$\frac{4\overline{x}-\overline{x}'}{\overline{x}'} = \frac{4\overline{x}+4\overline{x}}{-4\overline{x}} = \frac{8\overline{x}}{-4\overline{x}} = -2 \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις (1) και (2) στη δοσμένη εξίσωση έχουμε:

$$x^2 - 3x - (-2) = 0 \Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 = 0 \xLeftrightarrow{\Delta=1>0} x = 1 \text{ ή } x = 2.$$



Σχήμα 3: Ιστόγραμμα και πολύγωνο $F_i\%$.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται το παρακάτω δείγμα:

$$2, 4, 3, \alpha, 0,$$

όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.

Δ1. Να βρείτε την τιμή του α για την οποία για τη μέση τιμή ($\overline{x}$) του δείγματος ισχύει $\overline{x} = 3$.

Μονάδες 4

Δ2. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες για τη διάμεσο (δ) του δείγματος ισχύει $\delta = 3$.

Μονάδες 5

Δ3. Να βρείτε τις τιμές του α για τις οποίες $\overline{x} = \delta$.

Μονάδες 7

Δ4. Για $\alpha = 6$:

(α΄) Να δείξετε ότι το δείγμα είναι ανομοιογενές.

Μονάδες 2

(β΄) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της θετικής σταθεράς c που πρέπει να προσθέσουμε σε κάθε παρατήρηση έτσι ώστε το δείγμα να γίνει ομοιογενές.

Μονάδες 7

ΛΥΣΗ

Δ1. Έχουμε:

$$\bar{x} = \frac{2+4+3+a+0}{5} = \frac{9+a}{5},$$

επομένως:

$$\bar{x} = 3 \Leftrightarrow \frac{9+a}{5} = 3 \Leftrightarrow 9+a = 15 \Leftrightarrow a = 6.$$

Δ2. Διατάσσουμε τις γνωστές παρατηρήσεις σε αύξουσα σειρά:

$$0, 2, 3, 4.$$

Δεδομένου ότι οι πnaρατηρήσεις μας είναι 5 στο πλήθος, η διάμεσος θα είναι μία από αυτές. Έτσι, για να ισχύει ότι η διάμεσος είναι ίση με 3 πρέπει είτε $a > 3$, οπότε η μεσαία παρατήρηση είναι το 3 είτε $a = 3$ οπότε και πάλι η μεσαία παρατήτηση είναι το 3. Ειδάλλως, αν δηλαδή $a < 3$ τότε η μεσαία παρατήρηση είναι το a, άρα $\delta = a < 3$. Συνεπώς, οι ζητούμενες τιμές είναι $a \geq 3$.

Δ3. Όπως είδαμε παραπάνω:

$$\delta = \begin{cases} 3 & a \geq 3 \\ a & a < 3 \end{cases}$$

Διακρίνουμε, λοιπόν, δύο περιπτώσεις:

- Αν $a \geq 3$ τότε:

  $$\bar{x} = \delta \Leftrightarrow \frac{9+a}{5} = 3 \Leftrightarrow 9+a = 15 \Leftrightarrow a = 6,$$

  που είναι δεκτό.

- Αν $a < 3$ τότε:

  $$\bar{x} = \delta \Leftrightarrow \frac{9+a}{5} = a \Leftrightarrow 9+a = 5a \Leftrightarrow 4a = 9 \Leftrightarrow a = \frac{9}{4},$$

  που είναι δεκτό γιατί $\frac{9}{4} < 3$.

Συνεπώς, οι ζητούμενες τιμές είναι $a = 6$ και $a = \frac{9}{4}$.

Δ4. Για $a = 6$:

(α΄) Έχουμε $\bar{x} = 3$ όπως είδαμε παραπάνω, ενώ για τη διακύμανση έχουμε:

$$\begin{aligned} s^2 &= \frac{(0-3)^2 + (2-3)^2 + (3-3)^2 + (4-3)^2 + (6-3)^2}{5} = \\ &= \frac{9+1+0+1+9}{5} = \\ &= 4. \end{aligned}$$

Συνεπώς $s = \sqrt{s^2} = \sqrt{4} = 2$ άρα:

$$CV = \frac{s}{\bar{x}} = \frac{2}{3} > 0.1,$$

άρα το δείγμα είναι ανομοιογενές.

(β′) Αν προσθέσουμε σε κάθε παρατήρηση μία θετική σταθερά c τότε η νέα μέση τιμή $\overline{x}'$ θα είναι $\overline{x}' = \overline{x} + c = 3 + c$ ενώ η τυπική απόκλιση θα παραμείνει αμετάβλητη. Συνεπώς:

$$CV' = \frac{s'}{\overline{x}'} = \frac{2}{3+c}.$$

Για να είναι το δείγμα μας ομοιογενές πρέπει:

$$CV' \leq 0.1 \Leftrightarrow \frac{2}{3+c} \leq \frac{1}{10} \overset{c>0}{\Longleftrightarrow} 20 \leq 3 + c \Leftrightarrow c \geq 7.$$

Έτσι, η ελάχιστη τιμή για την οποία συμβαίνει αυτό είναι $c = 7$.