**ΚΡΙΤΗΡΙΟ ΑΞΙΟΛΟΓΗΣΗΣ**
**ΤΑΞΗ:** Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ
**ΜΑΘΗΜΑ:** ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
**ΚΕΦΑΛΑΙΟ:** ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙΣ
**ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ:** ΜΑΡΚΟΣ ΒΑΣΙΛΗΣ

## ΘΕΜΑ Α

**Α1.** Πότε λέμε ότι μία συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα $\Delta$ του πεδίου ορισμού της;

**Μονάδες 4**

**Α2.** Έστω $P(x) = a_\nu x^\nu + a_{\nu-1}x^{\nu-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ μία πολυωνυμική συνάρτηση. Να δείξετε ότι, για κάθε $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει :

$$\lim_{x\to x_0} P(x) = P(x_0).$$

**Μονάδες 7**

**Α3.** Να χαρακτηρίσετε τις ακόλουθες προτάσεις ως **Σωστές** ή **Λανθασμένες**, σημειώνοντας στο χαρτί σας δίπλα από κάθε πρόταση τη λέξη Σωστό ή Λάθος, αντίστοιχα:

**(α΄)** Αν μία συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι γνησίως φθίνουσα τότε είναι και αντιστρέψιμη.

**(β΄)** Το όριο $\lim_{x\to x_0} f(x)$ υπάρχει και είναι ίσο με $\ell$ αν και μόνον αν

$$\lim_{x\to x_0} (f(x) - \ell) = 0$$

.

**(γ΄)** Αν για μία συνάρτηση $f$ ισχύει ότι:

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = -5 \text{ και } \lim_{x\to x_0^+} f(x) = 5,$$

τότε $\lim_{x\to x_0} f(x) = 0$.

**(δ΄)** Αν $f(x) = e$ και $g(x) = \ln x$ τότε:

$$(f \circ g)(x) = 1, \ \ x \in \mathbb{R}.$$

**(ε΄)** Για τη συνάρτηση $f(x) = \sqrt{-x}$ υπάρχει το όριο:

$$\lim_{x\to 0} f(x)$$

αν και δεν έχει νόημα το όριο $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$.

**Μονάδες 10**

**Α4.** Να χαρακτηρίσετε την ακόλουθη πρόταση ως **Σωστή** ή **Λανθασμένη** και να αιτιολογήσετε:

Αν $\lim_{x\to x_0} f(x) \geq 0$, τότε $f(x) \geq 0$ κοντά στο $x_0$.

**Μονάδες 4**

## ΛΥΣΗ

1. Σ.Β., σελ. 31.
2. Σ.Β., σελ. 49.
   (α΄) Σωστό
   (β΄) Σωστό
   (γ΄) Λάθος
   (δ΄) Λάθος
   (ε΄) Σωστό
3. Η πρόταση είναι **Λανθασμένη**. Ένα αντιπαράδειγμα είναι η συνάρτηση:
   $$f(x) = -x^2,$$
   για $x_0 = 0$, καθώς $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0(\geq 0)$ και $f(x) < 0$ κοντά[1] στο $x_0 = 0$. *Σχόλιο: Η σωστή μορφή της πρότασης είναι η ακόλουθη:*
   $$\lim_{x\to x_0} f(x){>}0 \Rightarrow f(x){>}0 \text{ κοντά στο } x_0.$$

## ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 - e^{1-x}$, $x \in \mathbb{R}$.

**B1.** Να την μελετήσετε ως προς την μονοτονία.

**Μονάδες 5**

**B2.** Να δείξετε ότι η f είναι αντιστρέψιμη και να βρείτε την αντίστροφή της.

**Μονάδες 5**

**B3.** Να βρείτε το σύνολο τιμών της f.

**Μονάδες 4**

**B4.** Να υπολογίσετε τα όρια:
$$\lim_{x\to-\infty} f(x) \text{ και } \lim_{x\to+\infty} f(x).$$

**Μονάδες 6**

**B5.** Να χαράξετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f.

**Μονάδες 6**

## ΛΥΣΗ

1. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:
   $$\begin{aligned} x_1 &< x_2 \\ \Rightarrow -x_1 &> -x_2 \\ \Rightarrow 1-x_1 &> 1-x_2 \\ \Rightarrow e^{1-x_1} &> e^{1-x_2} \\ \Rightarrow -e^{1-x_1} &< -e^{1-x_2} \\ \Rightarrow 1-e^{1-x_1} &< 1-e^{1-x_2} \\ \Rightarrow f(x_1) &< f(x_2), \end{aligned}$$
   άρα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

[1]Να θυμηθούμε ότι «κοντά» στο 0 σημαίνει εκεί γύρω και *όχι* 0.

2. Η f είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της, άρα και 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Για τον υπολογισμό της αντίστροφης έχουμε:

$$\begin{aligned} & f(x) = y \\ \Leftrightarrow\ & 1 - e^{1-x} = y \\ \Leftrightarrow\ & -e^{1-x} = -1 + y \\ \Leftrightarrow\ & e^{1-x} = 1 - y \\ \Leftrightarrow\ & 1 - x = \ln(1-y) \\ \Leftrightarrow\ & -x = -1 + \ln(1-y) \\ \Leftrightarrow\ & x = 1 - \ln(1-y), \end{aligned}$$

άρα $f^{-1}(x) = 1 - \ln(1-x)$.

3. Το σύνολο τιμών της f είναι το πεδίο ορισμού της αντίστροφης, επομένως (οι πράξεις παραλείπονται ως εύκολες):

$$R_f = D_{f^{-1}} = (-\infty, 1).$$

4. Για το πρώτο όριο, θέτουμε $y = 1 - x$, οπότε, αφού:

$$\lim_{x\to-\infty}(1-x) = 1 - (-\infty) = 1 + \infty = +\infty,$$

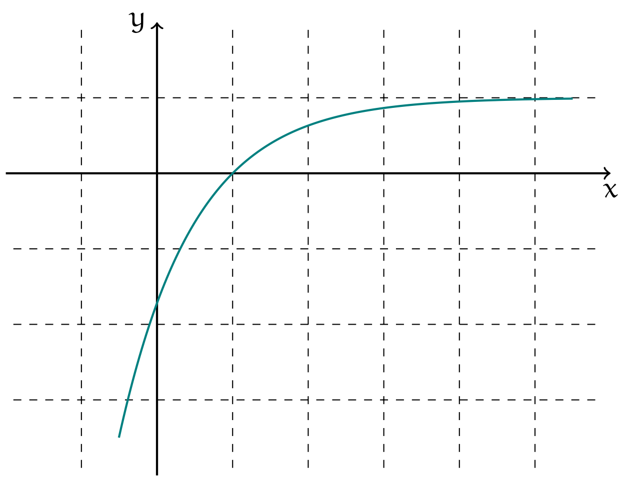
έπεται ότι:

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{y\to+\infty}(1 - e^{y}) = 1 - (+\infty) = -\infty.$$

Μπορούμε, όμοια, να βρούμε και το άλλο όριο, αλλά, για λόγους ποικιλίας, θα το λύσουμε με ποιο στοιχειώδη μέσα, χωρίς αλλαγή μεταβλητής:

$$\lim_{x\to+\infty}(1 - e^{1-x}) = \lim_{x\to+\infty}\left(1 - \frac{e}{e^{x}}\right) = 1 - \frac{e}{+\infty} = 1 - 0 = 1.$$

5. Ξεκινώντας από τη γραφική παράσταση της $e^{x}$, περνάμε στην $e^{-x}$ με ανάκλαση ως προς τον άξονα $y'y$, μετά στην $e^{1-x}$ με οριζόντια μεταφορά κατά 1 προς τα δεξιά, μετά στην $-e^{1-x}$ με ανάκλαση ως προς τον $x'x$ και, τέλος, στην $f(x)$ με κατακόρυφη μετατόπιση κατά 1. Η τελική γραφική παράσταση φαίνεται στο σχήμα 2.




Σχήμα 2: Η γραφική παράσταση της f.

## ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \ln(x + \sqrt{x})$.

**Γ1.** Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

**Μονάδες 3**

**Γ2.** Να μελετήσετε την $f$ ως προς την μονοτονία.

**Μονάδες 6**

**Γ3.** Να δείξετε ότι η $f$ είναι αντιστρέψιμη και να υπολογίσετε το:

$$f^{-1}(\ln e + \ln(1 + e)).$$

**Μονάδες 5**

**Γ4.** Να λύσετε την ανισότητα:

$$f(e^{x^2-4x+5}) - \ln e > \ln(1 + e).$$

**Μονάδες 6**

**Γ5.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0} f\left(\frac{x^2}{\text{συν}\, x}\right).$$

**Μονάδες 5**

## ΛΥΣΗ

1. Αρχικά, πρέπει $x \geq 0$, αφού έχουμε υπόρριζη παράσταση. Έπειτα, για τον λογάριθμο απαιτούμε:
$$x + \sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{x}(\sqrt{x} + 1) > 0.$$
Το τελευταίο είναι γινόμενο ενός θετικού αριθμού $(\sqrt{x}+1)$ με την $\sqrt{x}$. Επομένως, αυτό που πρέπει (και αρκεί) να ισχύει είναι[2]:
$$\sqrt{x} > 0 \Leftrightarrow x > 0.$$
Τελικά:
$$D_f = (0, +\infty).$$

2. Έστω $x_1, x_2 > 0$ με $x_1 < x_2$. Διαδοχικά, έχουμε:
$$x_1 < x_2 \Rightarrow \sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$$
και, προσθέτοντας κατά μέλη με την $x_1 < x_2$ έχουμε:
$$x_1 + \sqrt{x_2} < x_2 + \sqrt{x_2} \Rightarrow \ln(x_1 + \sqrt{x_1}) < \ln(x_2 + \sqrt{x_2}) \Rightarrow f(x_1) < f(x_2),$$
άρα η $f$ είναι γνησίως αύξουσα στο $(0, +\infty)$.

[2]Μπορείτε να λύσετε αυτήν την ανισότητα με 1002 τρόπους, όπως να θέσετε κ.λπ. . .

3. Η f είναι γνησίως μονότονη, άρα 1-1, άρα και αντιστρέψιμη. Για το $f^{-1}(\ln e+\ln(1+e))$ παρατηρούμε ότι:

$$f(e^2)=\ln(e^2+\sqrt{e^2})=\ln(e^2+e)=\ln(e(e+1))=\ln e+\ln(e+1),$$

οπότε:

$$f^{-1}(\ln e+\ln(1+e))=f^{-1}(f(e^2))=e^2.$$

4. Η δοσμένη ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$f\left(e^{x^2-4x+5}\right)>\ln e+\ln(1+e)=f(e^2).$$

Αφού η f είναι γνησίως αύξουσα, η ανισότητα γράφεται ως εξής:

$$e^{x^2-4x+5}>e^2,$$

οπότε λογαριθμίζοντας, παίρνουμε:

$$x^2-4x+5>2\Leftrightarrow x^2-4x+3>0,$$

η οποία λύνεται κατά τα γνωστά και μας δίνει:

$$x\in(-\infty,1)\cup(3,+\infty).$$

*Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι η ποσότητα* $e^{x^2-4x+5}$ *είναι πάντα θετική* ($>0$)*, άρα το πεδίο ορισμού της σύνθετης συνάρτησης* $f\left(e^{x^2-4x+5}\right)$ *είναι όλο το* $\mathbb{R}$*, οπότε δεν προκύπτει επιπλέον περιορισμός για τις λύσεις μας.*

5. Εδώ θέλει λίγη δουλίτσα. Αρχικά, με κάτι τόσο άσχημο μπροστά μας, δεν αντέχουμε άλλο και θέτουμ απευθείας:

$$y=\frac{x^2}{\sigma\upsilon\nu\, x}.$$

Πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε, λοιπόν, το όριο[3]:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2}{\sigma\upsilon\nu\, x}=\frac{0}{\sigma\upsilon\nu\, 0}=\frac{0}{1}=0.$$

Επομένως, το ζητούμενο όριο γράφεται:

$$\lim_{x\to 0} f\left(\frac{x^2}{\sigma\upsilon\nu\, x}\right)=\lim_{y\to 0} f(y)=\lim_{y\to 0}\ln(y+\sqrt{y}).$$

Εδώ, τώρα, ξαναθέτουμε:

$$u=y+\sqrt{y}$$

και, αφού:

$$\lim_{y\to 0}(y+\sqrt{y})=0+0=0,$$

έπεται ότι:

$$\lim_{y\to 0}\ln(y+\sqrt{y})=\lim_{u\to 0}\ln u=-\infty.$$

[3] Μην ψαρώνετε, άμα βλέπετε τέτοια, θέσιμο θέλουν συνήθως!

## ΘΕΜΑ Δ

Δίνονται δύο συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με:

$$g(x) = x^{2017} + x^{2019}$$

και η $f$ ικανοποιεί τη σχέση:

$$f(x + y - 1) > x + y, \text{ για κάθε } x, y \in \mathbb{R}.$$

**Δ1.** Να δείξετε ότι $f(x) > x + 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

**Μονάδες 5**

**Δ2.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x).$$

**Μονάδες 4**

**Δ3.** Να μελετήσετε την $g$ ως προς την μονοτονία.

**Μονάδες 4**

**Δ4.** Να αποδείξετε την ανισότητα:

$$(g \circ f)(x^2 + 1) > g(x^2 + 2).$$

**Μονάδες 6**

**Δ5.** Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{1}{f(g(-x))}.$$

**Μονάδες 6**

## ΛΥΣΗ

1. Θέτουμε $y = 1$ στη δοσμένη ανισότητα, οπότε:

$$f(x + 1 - 1) > x + 1 \Leftrightarrow f(x) > x + 1.$$

2. Αφού $f(x) > x + 1$ και $\lim_{x \to +\infty} (1 + x) = +\infty$, έπεται ότι:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty.$$

3. Έστω $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$. Τότε:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2017} < x^{2017}$$

και

$$x_1 < x_2 \Rightarrow x_1^{2019} < x^{2019},$$

οπότε, προσθέτοντας κατά μέλη:

$$x_1^{2017} + x_1^{2019} < x_2^{2017} + x_2^{2019} \Leftrightarrow g(x_1) < g(x_2),$$

άρα η $g$ είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

4. Ξεκινώντας από τη δοσμένη ανισότητα, θα καταλήξουμε σε κάτι που ισχύει προχωρώντας με ισοδυναμίες (χρησιμποιούμε την μονοτονία της $g$):

$$\begin{aligned}(g \circ f)(x^2+1) &> g(x^2+2)\\ \Leftrightarrow g(f(x^2+1)) &> g(x^2+2)\\ \Leftrightarrow f(x^2+1)) &> x^2+2.\end{aligned}$$

Το τελευταίο ισχύει διότι από το πρώτο ερώτημα ισχύει $f(x) > x+1$, οπότε, για $x^2$ στη θέση του $x$ προκύπτει το ζητούμενο.

5. Θέτουμε $y = g(-x)$, οπότε:

$$\lim_{x\to-\infty} g(-x) = \lim_{x\to-\infty}(-x^{2017} - x^{2019}) =$$
$$= \lim_{x\to-\infty} x^{2019}\left(-1 - \frac{1}{x^2}\right) = -\infty \cdot (-1-0) = +\infty.$$

Επομένως:

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{f(g(-x))} = \lim_{y\to+\infty} \frac{1}{f(y)} = \frac{1}{+\infty} = 0.$$

*Γενική παρατήρηση: Όταν δεν ξέρουμε τι να κάνουμε, αλλάζουμε μεταβλητή! Σώζει ζωές!*